

Ю.Б.ВИНОГРАДОВ, Т.А.ВИНОГРАДОВА

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГИДРОЛОГИИ

*Учебное пособие  
для студентов высших  
учебных заведений*



Москва  
Издательский центр «Академия»  
2010

УДК 556(075.8)  
ББК 26.22я73  
В493

Рецензенты:

д-р геогр. наук, проф. *Н. И. Алексеевский* (МГУ им. М. В. Ломоносова);  
д-р геогр. наук, проф. *А. М. Догановский*  
(Российский государственный гидрометеорологический университет)

**Виноградов Ю. Б.**

В493 Математическое моделирование в гидрологии : учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / Ю. Б. Виноградов, Т. А. Виноградова. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. — 304 с.

ISBN 978-5-7695-6785-8

Учебное пособие содержит материал о системах современных методов изучения, анализа и математического описания процессов формирования речного стока и опасных гидрологических явлений, объединенных под общим понятием «математическое моделирование». Рассмотрены цели и возможности моделирования, различные классификации моделей, принципы их проектирования, содержание гидрологических моделей, режимы моделирования, его использование в методах гидрологических расчетов и прогнозов нового поколения. Обсуждены особенности детерминированных и стохастических математических моделей, особо отмечена их перспективность в гидрологических расчетах ближайшего будущего. Сформулированы предъявляемые к моделям требования — универсальность, адекватность, возможная простота, прозрачность структуры, работоспособность.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

УДК 556(075.8)  
ББК 26.22я73

*Оригинал-макет данного издания является собственностью  
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом  
без согласия правообладателя запрещается*

© Виноградов Ю. Б., Виноградова Т. А., 2010  
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2010  
ISBN 978-5-7695-6785-8 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2010

## От авторов

Математическое моделирование — пожалуй, самая сложная и еще не установившаяся отрасль гидрологии. Данное учебное пособие является одной из первых попыток систематического изложения основных задач и проблем этого развивающегося раздела гидрологии.

Мы — сторонники ведения диалога с читателями (особенно когда это молодые люди, вступающие в науку) от первого лица. Нигде в книге не утверждаем, что некие истины непреложны, наоборот, излагаем их в полемической форме и тем самым стараемся ввести читателей в сложный мир современных гидрологических проблем. При этом читатели должны сразу погрузиться в обстановку дискуссий и споров, а также привыкнуть к неоднозначности восприятия разными лицами природы и необходимой методологии ее изучения. Все это должно несомненно способствовать возникновению у читателей интереса к науке и желания сформировать обо всем собственное мнение.

Пользуемся случаем, чтобы выразить свою признательность многим студентам, магистрантам и аспирантам, принимавшим участие в реализации наших моделей на различных природных объектах. Особо мы благодарны сотруднице Государственного гидрологического института О. М. Семеновой за программирование, проведение расчетов и общую преданность обозначенной проблеме, а также С. А. Журавлеву, Н. С. Алексееву, И. Н. Бельдиму, А. Д. Медведевой за помощь в подборе материалов и оформлении рукописи учебного пособия.

# Введение

Название вида *Homo sapiens* — «человек разумный», которое мы не всегда оправдываем, вполне можно было бы заменить на другое, может быть, даже более подходящее — «человек моделирующий», ибо окружающий нас мир мы воспринимаем вовсе не как один к одному, а как систему создаваемых нами образов, идеализированных представлений, умозрительных моделей. Это касается и людей, и событий, и явлений природы. У каждого человека данные модели и образы достаточно индивидуальны, не всегда полноценны и часто ошибочны. Но мы продолжаем непрерывно моделировать, даже не задумываясь об этом. Выходит, что моделирование — наше обычное, нормальное и почти подсознательное состояние.

Когда же мы касаемся науки, кое-кто все-таки понимает, что хорошо бы свое инстинктивное моделирование как-то целеустремленно организовать, поставить в определенные рамки — разумные, логические, смысловые, обобщающие и, как достойный вариант, математические!

Моделирование — это исследование реально существующих природных объектов, явлений и процессов, имеющих отношение в нашем случае к кругу проблем, входящих в область интересов гидрологии. Но такое определение, на первый взгляд, явно недостаточно, ибо все, что делалось и делается в гидрологии, формально удовлетворяет данному определению. Дополним последнее: моделирование — это способ описания объектов, явлений и процессов, предусматривающий наибольшее приближение к реальной действительности с учетом всех привходящих обстоятельств. Однако снова присутствует некоторая неопределенность, но в этом отношении все известные в гидрологии модели тоже ее не лишены. Второе дополнение: моделирование — не просто наиболее полноценное исследование, но одновременно и процесс конструирования конкретной модели, ее реализации и использования на конкретных объектах.

Теперь неизбежно следует дать определение самому понятию «модель». Итак, модель — это отображенная реальность. Модель — нечто, соответствующее оригиналу. Модель — это схематическое упрощенное представление о природном прообразе, это соответствующим образом организованное знание.

Можно говорить о различных неизбежных последовательных стадиях самого процесса моделирования:

- создание умозрительной модели как итога размышлений, рассуждений, мысленных экспериментов, обдумывания поставленной задачи;

- создание вербальной модели, как развитие предыдущей, уже в словесном варианте, в беседах, спорах и обсуждениях, а также в письменных записях всякого рода;

- разработка содержательной модели — это развитие двух предыдущих стадий, но уже с четкими идеологией и методологией, а также с необходимой формализацией.

Содержательная модель — необходимый и самый ответственный элемент всего подготовительного периода. Это реализованное обретение достаточно четкого представления об объекте моделирования, воплощение принятых решений и осознания особенностей, которые привносит личность «человека моделирующего». Важно подчеркнуть, что качество, оригинальность и разработанность содержательной модели являются в конце концов главным определяющим фактором качества проектируемой математической модели и успеха всего проводимого исследования. Содержательную модель желательно, по возможности, упростить, но не принося в жертву принципиально важные стороны исследуемого. Чувство меры и способность испытывать восхищение перед тайнами природы — непреложные свойства удачливого исследователя-модельера.

Итак, математическое моделирование ... Но прежде чем приступить к обсуждению его проблем и возможностей, вернемся к первой фразе, определяющей, что такое моделирование: моделирование — это исследование ... Мы понимаем разочарование неопитов, которым чудится, что за словами «математическое моделирование» кроется некая гидрологическая тайна, доступная только узкому кругу посвященных. На самом деле современная прикладная математика, получившая в известном смысле почти полную свободу действия, дарованную ей появлением компьютера, практически стала наукой о математическом моделировании. Поэтому исследование гидрологических объектов, явлений и процессов по-настоящему эффективно только в рамках методологии математического моделирования. Другими словами, по их количественным описаниям понятия «исследование» и «моделирование» выступают в качестве почти синонимов.

В результате дефиниции «математическая модель» и «математическое моделирование» настолько расширили свое положение в современной науке, что поменяли свою некогда чисто методологическую сущность на почти мировоззрение. Поэтому приложение методов математики к естественным наукам и гидрологии построено, в частности, исключительно на математическом моделировании.

Математическая модель — приближенное описание природных процессов и явлений, выраженное с помощью математических правил и математической символики.

Математическое моделирование — способ исследования объектов, явлений и процессов, основанный на применении моделей.

Если какое-то время назад в гидрологии противопоставлялись два взаимодополняющих подхода — традиционный и математического моделирования, и последнее считалось просто новым разделом гидрологии, то сейчас можно однозначно утверждать, что математические модели — это основной, если не единственный, инструмент любых гидрологических исследований. Сказанное вовсе не означает, что традиционные методы гидрологии канули в вечность, ибо еще функционирует достаточное количество ортодоксальных гидрологов, носителей этой научной парадигмы. Всем же истинным достижениям традиционной гидрологии всегда находится подобающее место в современной «моделирующей» гидрологии.

Можно ли утверждать, что математическое моделирование обеспечило сегодня необходимый уровень и результативность гидрологии? К сожалению, нельзя. Констатируемый многими мыслящими гидрологами кризис современной гидрологии обусловлен именно проблемами и тупиками математического моделирования. Причина кроется в том, что моделировать одно и то же явление можно очень по-разному.

Словосочетание «математическая модель» перед гидрологическим сообществом как бы уравнивает всех модельеров. Хотя среди последних присутствуют и специалисты своего дела, и люди, злоупотребляющие доверием простаков, но хорошо знающие необходимый набор «ключевых слов». Известно слишком много примеров математических манипуляций в гидрологии без всякой пользы для этой науки. Столь же опасен антиматематический фанатизм гидрологов — приверженцев ортодоксальных взглядов. Выход — широкое и уверенное использование математики и одновременно освобождение от ее гипноза. Освоение гидрологами математических методов позволит им увидеть во многих моделях отсутствие большого смысла с точки зрения гидрологии, что будет способствовать пресечению отдельных псевдонаучных тенденций.

Существует еще один своеобразный аспект: за словом «модель» могут стоять и одно единственное уравнение, и сложнейшая система, подробное описание алгоритмов которой может занять целую книгу. Последний вариант в случае необходимости будем называть «моделирующей системой».

Необходимо разделение и осознание существенного содержания моделей двух принципиально различных классов — детерминированных (физических, генетических) и стохастических (вероятностных, статистических). Определение «детерминированная» в сочетании со словом «модель» здесь следует понимать как описание явления природы с точки зрения объективной закономерности и причинной обусловленности их существования и динамики. И противопоставлять в этом контексте «детерминизм» надо скорее «стохастике» (по-

нению, связанному со случайностью и вероятностью), но не «индетерминизму» как философской концепции.

Детерминированные модели формирования стока или других гидрологических явлений обобщают, упорядочивают и «спрессовывают» всю существенную информацию, которой располагает современная теоретическая и экспериментальная гидрология. Главная задача детерминированного моделирования — преобразование метеорологического воздействия на речной бассейн в гидрограф стока в замыкающем створе.

Стохастические модели описывают системы, основанные на понятиях теории вероятностей и математической статистики, случайных событиях, величинах, функциях (процессах), полях. На применении стохастических моделей построена специфическая ветвь современной гидрологии — «стохастическая гидрология». В рамках последней анализируются или, наоборот, воспроизводятся разного рода случайные (стохастические, вероятностные, статистические) структуры. Важное и в некотором роде фундаментальное свойство стохастических моделей — это их пригодность для описания тем или иным образом организованных числовых массивов, относящихся к любой области человеческого знания. Таким образом, стохастическая гидрология гидрологична только по происхождению данных.

Часто гидрологи-детерминисты и гидрологи-стохастики используют одно и то же словосочетание — «гидрологический процесс». Но в одном случае — это последовательная смена состояний в развитии природного явления формирования стока на водосборе, а в другом — временные ряды, т. е. просто наблюдаемые последовательности некоторых гидрологических величин (расходов, слоев осадков, стока, испарения).

Среди некоторых гидрологов-стохастиков распространено мнение, что стохастический процесс является более общим и сложным, чем его детерминированный аналог. Но никто и никогда так и не сумел привести пример такой аналогии, как таковой. Часто также ставился и продолжает ставиться некорректный вопрос: какая модель предпочтительнее — детерминированная или стохастическая? На самом деле эти модели всегда решают принципиально разные задачи: для детерминированной модели, например, характерны вычисления гидрографов стока по наблюдаемым метеорологическим данным, для стохастической — анализ или воспроизведение колебаний средних годовых или экстремальных характеристик стока. Поступить наоборот просто невысказано.

Естественна другая постановка вопроса — объединение детерминированной и стохастической моделей или их элементов в единую вычислительную систему (комплексную модель). Здесь возможны варианты:

- совместное использование двух самостоятельных моделей;

- появление стохастических элементов в детерминированной системе;
- появление детерминированных элементов в стохастической системе.

Первый вариант напрямую ведет к идеальной форме детерминированно-стохастического моделирования, которому далее уделено специальное внимание. В двух последних случаях привнесенные элементы осуществляют порученные им функции, но при этом не следует изменять название основной моделирующей системы.

Перепоручение программирования посторонним лицам — всегда ошибочное решение и обычно ведет к неприятным последствиям, связанным с возникающей зависимостью автора модели от производителя программы, о чем кратко, но выразительно высказался Уоллес Вонг (2007) в своей книге, посвященной основам программирования.

# Детерминированное моделирование. Предварительный обзор

## 1.1. Почему моделирование?

Приложение математики в гидрологии не есть организованный набор готовых разномасштабных математических конструкций. И математическое моделирование гидрологических процессов — это нечто совсем иное. Главная проблема в этом контексте — суметь добиться постепенно организованного продвижения размышлений гидролога как конструктора модели:

- сначала от общих представлений о реальных гидрологических объектах, явлениях и процессах путем их разумной идеализации к *содержательной* модели, формулируемой на языке, достаточно общепринятом в среде гидрологов;

- затем от содержательной модели к ее рациональной математической аппроксимации, пытаясь оставаться на уровне оптимальных решений между гидрологической содержательностью и простотой математического описания;

- и наконец от математической модели с ее вычислительными алгоритмами к ее плодотворным интерпретациям.

Здесь мы сталкиваемся с некоторым непростым условием, не то чтобы обязательным, но настолько важным, что усматривается определенная зависимость судьбы и научной и прикладной эффективности сконструированных моделей от выполнения именно этого условия. Мы имеем в виду то специфическое соображение, которое столь удачно сформулировал Ганс Солье (1987): «Для того чтобы связать воедино многочисленные факты и прийти хоть к какому-то их пониманию, все они должны быть представлены в голове одного человека». Известные факты коллективного творения, с нашей точки зрения, подтверждают отсутствие желательной цельности в конечных результатах. Для однозначного понимания высказанной идеи поясняем, что речь идет вовсе не о преимуществах гидрологов-одиночек, а скорее о целесообразности создания подходящих команд единомышленников во главе со своего рода «генеральным конструктором».

И все же, если тот, кого называют заведующим, шефом или тем же генеральным конструктором, не являет собой некое средоточие

основных концепций и конструктивных идей, то и группа сотрудников, собранная под его руководством, вовсе не будет командой единомышленников, способных к подлинным свершениям. Ибо, как сказал Джон Голсуорси, «нет таких понятий, как истины природы, без индивидуального видения», и «наблюдатель и увиденное им, переплетаясь между собой, образуют фактуру любого шедевра».

Вообще, математическое моделирование — это вовсе не какой-то новый модный подход, совсем нет. И соображения, приводящие нас к математическому моделированию, вполне гидрологичны. Это просто выход на новый уровень описания гидрологических явлений, более точное и подробное восприятие всего того, что мы способны наблюдать в природе. Возможность же проводить громоздкие, как это казалось нам в старые времена, вычисления появилась с приходом в нашу жизнь компьютеров. А компьютеры и математическая символика в нашем деле познания природы — это и есть математическое моделирование. Поэтому последнее — просто форма реакции гидрологии на некоторое усложнение описания нашего мира. Все гидрологически значимое, что происходит в природе, должно быть отражено в математических моделях.

Теперь немного философии. Именно философы задают простой, но многозначительный вопрос: чем же хороши модели (*then what good are models*)? И тут же отвечают, что основная ценность модели — эвристика (N. Oreskes et al., 1994). Последняя — это «совокупность логических приемов и методических правил теоретического исследования и отыскания истины» и еще это «метод обучения, способствующий развитию находчивости, активности». В данном контексте имеется в виду первое значение слова, но для тех, кто участвует в подготовке будущих модельмейстеров, второе значение не менее важно.

Следует несколько развить вопрос: что стоит за столь краткой «оценкой ценности» такого научного явления, как модель? И здесь важна следующая мысль: модельер должен продемонстрировать степень согласия между моделью и физическим миром, который она представляет, и очертить пределы этого согласия (N. Oreskes et al., 1994).

С другой стороны, идея модели привела философа Нэнси Картрайт к мнению, что модель является фантазией (N. Cartwright, 1983). «Мнение нарочито провокационное», оно может показаться абсурдным и даже обидным (N. Oreskes et al., 1994). Но давайте отладим должное тому оттенку слова «фантазия», который связан со способностью к творческому воображению и с мечтой. Ведь даже в музыке фантазия на заданную тему по-своему отображает именно последнюю. Мы сделаем правильный вывод, если окрасим дедуктивно-индуктивные построения в радостные тона нашего творческого погружения в тайны природы.

## 1.2. Математическое моделирование с точки зрения математика

Говоря далее о некоторых элементах теории математических моделей, мы должны помнить, что все сказанное имеет или может иметь отношение к любой отрасли науки. Но мы имеем в виду гидрологию. Поэтому все, что написано в этом разделе, относится к конкретной деятельности именно гидрологов, но вовсе не математиков, как об этом может кто-то подумать. Просто общие принципы математического моделирования различных реальных процессов и явлений сформулированы математиками и в данном случае пересказаны гидрологами и для гидрологов.

Если мы собираемся с исследовательской или прикладной целью изучить и описать совокупность свойств реального гидрологического объекта, то должны построить соответствующую математическую модель, отвечающую по форме и содержанию поставленной задаче. При этом математика как таковая должна быть применена не к самому объекту, а к его математической модели. Под гидрологическим объектом впредь будем понимать или действительно объект (речной бассейн, русловую сеть, водоемы разного типа, болота, ледники), или гидрологическое явление (наводнение, паводок, половодье), или гидрологический процесс (снеготаяние, испарение, формирование стока — руслового и эрозионного, загрязнения). Существует достаточно очевидная логическая последовательность действий в общей схеме применения математики в таких науках о природе, как гидрология. Эта последовательность такова.

**1. Формулирование содержательной модели.** Начальный и одновременно важный этап построения математической модели — это получение четкого представления о моделируемом объекте, сформулированного на языке гидрологии. Нельзя жалеть ни времени, ни усилий на данном этапе, ибо от него в значительной мере зависит успех всего исследования. Такую по своей сути гидрологическую модель можно назвать содержательной. В это время уже можно подумать об уточнении структуры изучаемого объекта, существенных в рамках решения поставленной задачи, свойствах его элементов, выяснении действующих в системе сил. Следует поразмыслить о возможных упрощениях содержательной модели. Выдвигаются соответствующие концепции и гипотезы.

**2. Формулирование математической задачи.** Содержательная модель постепенно все более полно переводится на формальный математический язык, в результате чего возникает первый прообраз математической модели. Обсуждаются, выбираются и реализуются методы решения возникающих математических задач. Получаемая математическая модель обычно сводится к набору уравнений того или иного вида, а также соотношений другого типа. Уточняется план действий, намечается, какие величины желательно най-

ти, какие зависимости и соотношения исследовать, продумывается, каким образом они могут быть получены. При этом конструируемая математическая модель строится с ориентацией на предполагаемые способы и методы решения возникающих математических задач.

**3. Интерпретация результатов исследования математической модели.** Этот третий (и последний) этап связан с оценкой результатов проведенного исследования, завершеного построением математической модели того или иного гидрологического процесса или явления. Здесь имеют смысл и разного рода вычислительные эксперименты и другие формы анализа. Сюда входит и контроль соответствия результатов, получаемых с помощью модели, известным фактам, представлениям, экспериментальным и наблюдаемым данным. Часто в результате главного вывода может быть необходимость изменения и модернизации модели.

Все три этапа тесно связаны между собой. Расчленение на этапы общей задачи построения математической модели условно и даже в чем-то искусственно.

Основными элементами «конструкции» математической модели являются постоянные и переменные величины — задаваемые и искомые. Последние обычно связываются уравнениями и неравенствами. Уравнения, включаемые в математическую модель, могут быть получены на основе определяющих соотношений между величинами, вытекающими из постулатов содержательной модели. При этом естественно использовать:

- универсальные физические законы (законы сохранения, законы Ньютона и т. п.);
- феноменологические законы (достаточно хорошо эмпирически и отчасти теоретически обоснованные) с ограниченной областью действия;
- полуэмпирические соотношения, возникающие в результате качественных соображений и при анализе результатов экспериментов и наблюдений;
- чисто эмпирические соотношения, получаемые при прямой обработке данных наблюдений.

К наиболее распространенным типам уравнений, встречающихся в математических моделях, следует отнести следующие:

- конечные уравнения (алгебраические и трансцендентные);
- обыкновенные дифференциальные уравнения (искомой является функция одного аргумента);
- уравнения с частными производными (искомой является функция нескольких аргументов), называемые обычно уравнениями математической физики.

Для реального объекта могут быть получены несколько неравновесных математических моделей. Выбор типа модели является непростой и ответственной задачей. Совсем плохо, когда тип модели

выбирается из слепого подражания или определяется пробелами в образовании или эрудиции исследователя.

Кратко остановимся на математической физике и ее основных уравнениях. Сначала приведем несколько важных мыслей, высказанных совместно физиком и математиком (Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. *Элементы математической физики*. — М., 1973).

«Математическая физика является, быть может, одним из самых значительных достижений человеческого разума».

«Математическая физика отнюдь не ограничивается получением математических соотношений, описывающих найденные из опыта зависимости между физическими величинами. Нужно подчеркнуть ее роль в формировании понятий, идей, образов».

Изложение следует концентрировать «вокруг задач, допускающих наглядную физическую интерпретацию», и тогда будет ясно, как «математические понятия и методы естественно вытекают из наглядных соображений». Необходимо «возможно более полно проследить связи между математическим и физическим подходами, указать наглядный смысл процедуры и промежуточных этапов математического решения».

«Всякое математическое уравнение описывает реальные процессы лишь приближенно, с большей или меньшей точностью».

«Правильность уравнения, адекватность его реальным процессам не может быть доказана чисто математически, она вытекает из сопоставления следствий из этого уравнения с реальностью, с экспериментами, с физическими законами».

Не можем не процитировать особо важное в рассматриваемом контексте суждение, принадлежащее известному математику Рихарду Куранту (по кн.: *Современная математика для инженеров*. — М., 1958): «*Поскольку точные физические законы являются всего лишь идеализацией и поскольку любую заданную физическую ситуацию можно идеализировать многими различными способами, то важно уметь выбирать приемлемые идеализации*». Пусть эта фраза послужит антитезисом мнению некоторых гидрологов о своей безукоризненности при выборе таких идеализаций.

А теперь остановимся на нескольких основных положениях, связанных с уравнениями математической физики. Сначала утверждение: большинство физических законов природы можно сформулировать на языке уравнений с частными производными. При этом следует быть осведомленным о некоторых основных используемых понятиях, сведения о которых приведены ниже.

1. Порядком уравнения называется наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{— уравнение первого порядка;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{— уравнение второго порядка;}$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  — уравнение третьего порядка.

2. Числом переменных называют число независимых переменных:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  — уравнение с двумя переменными  $x$  и  $t$ ;

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (1/r) \frac{\partial u}{\partial r} + (1/r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$  — уравнение с тремя переменными  $r$ ,  $\theta$  и  $t$ .

3. Уравнения с частными производными бывают линейными и нелинейными.

Уравнение линейно, если зависимая переменная и все ее частные производные входят в него линейным образом (в частности, не умножаются друг на друга, не возводятся в квадрат и т. п.), например

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Пример нелинейного уравнения:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ .

3. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G. \quad (1.1)$$

Здесь  $A, B, C, D, E, F, G$  — константы или заданные функции независимых переменных  $x$  и  $y$ . Уравнение (1.1) называется однородным, если правая часть  $G(x, y)$  тождественно равна 0 для всех  $x$  и  $y$ . Если это не так, то уравнение называется неоднородным.

Если коэффициенты  $A, B, C, D, E, F$  уравнения (1.1) постоянны, то последнее называется уравнением с постоянными коэффициентами. В противном случае — уравнением с переменными коэффициентами.

Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (1.1) относятся к одному из трех типов — параболическому, гиперболическому, эллиптическому.

Параболический тип:  $B^2 - 4AC = 0$  описывает процессы теплопроводности и диффузии.

Гиперболический тип:  $B^2 - 4AC > 0$  описывает колебательные системы и волновые движения.

Эллиптический тип:  $B^2 - 4AC < 0$  описывает установившиеся процессы.

Поскольку в общем случае величина  $B^2 - 4AC$  является функцией независимых переменных, то тип уравнения в принципе может изменяться в области его определения.

В заключение отметим в качестве желательных следующие свойства математических моделей при прочих равных условиях:

- достаточной простоты (экономия труда и средств при сохранении разумной точности);
- полноты (принципиальная возможность получить необходимые решения);
- робастности (устойчивости относительно погрешностей в исходных данных);
- наглядности (ясного содержательного смысла, позволяющего осуществлять контроль за работой модели и планирование вычислительных экспериментов).

Подведем итог и выделим два требования особо высокого уровня.

Важнейшим требованием, которое может быть предъявлено к математической модели, является требование ее адекватности (соответствия) реальному объекту, процессу, явлению. Причем имеется в виду правильность и качественного, и количественного их описания. Сказанное прямо относится и к точности моделирования. Можно говорить о большей или меньшей адекватности моделей, имея в виду относительность соответствия каждой модели природе объекта или явления.

В частности, может быть выделен особый аспект неадекватности модели, возникающий из-за того, что при ее построении была применена схема, разработанная для иной группы явлений, к которой изучаемое явление не относится. Гипотезы, на которые опиралась эта модель, в данной ситуации не обоснованы и даже несправедливы.

Другое не менее важное требование таково: «выбираемый метод решения задачи должен быть рассчитан на введение в него только таких данных, которые можно реально иметь с требуемой достоверностью. Если достаточно точные исходные данные получить не представляется возможным, то во многих случаях бывает целесообразным изменить метод — обычно упростив его...» [30, с. 164]. Иногда возникает связанный с данным требованием вопрос: «не проще ли непосредственно измерить величину, которую в принципе можно и вычислить?» [30, с. 37].

В этом разделе мы во многом следовали положениям, с нашей точки зрения удачно сформулированным в небольшой, но очень информативной книге А. Д. Мышкиса [30]. Оттуда же взяты две последние приведенные здесь цитаты.

### **1.3. Математическое моделирование с точки зрения гидролога**

Гидрологию, которую большинство ее служителей продолжают воспринимать как науку, издавна привычную, установившуюся в

своих подходах и методах, не нуждающуюся в каких-либо кардинальных переменах, условимся называть «традиционной гидрологией» в отличие от зарождающейся и грядущей «гидрологии нового поколения». Названия эти глубоко условные, не являются общепринятыми и кое-кого даже раздражают. Наверное, все же «традиционная гидрология» — это наука, которая существовала и развивалась в XX в. Джеймс Дуг писал, что последний отмечен проявлением научной гидрологии и расценил его в отношении его развития на четыре периода: эмпиризма (1900 — 1930), рационализации (1930 — 1950), теоретизации (1950 — 1975) и компьютеризации (1975 — 2000). Главное разочарование Дуг испытал в связи с неудачей исследований в области реакции речных бассейнов на метеорологический вход и объединения детерминированных и стохастических методов.

Мы воспринимаем гидрологию нового поколения как ту же самую традиционную гидрологию, но расширяющую свои горизонты и увеличивающую свое проникновение в самую суть явлений природы. И — это гидрология, в основе которой лежит уже глубоко осознанная методология математического моделирования. Установить истинное время, когда в гидрологии появились идеи, которые мы сейчас связываем с этими двумя словами, почти невозможно. Гидрологи всегда стремились построить свои расчетные и прогностические методы на основе попыток расшифровать «генезис» стока и других родственных явлений. Поэтому развитие «генетических» методов было всегда в центре внимания гидрологов XX в., по крайней мере второй его половины. Разве все это не было подспудным стремлением к тому, что мы сейчас называем математическим моделированием?

Но настоящие перспективы перед последним открылись после прихода в нашу жизнь компьютера. Поэтому только сейчас, с большим опозданием, в наше представление о возможностях гидрологии постепенно проникает новое содержание.

Всегда следует помнить, что именно традиционная гидрология заложила основы для зарождения своей преемницы — гидрологии нового поколения. Последняя где-то в отдаленном будущем, видимо, получит иное наименование, например — «гидрология эпохи примитивных моделей».

Теперь выскажем главную идею, осуществление которой позволит построить именно такие математические модели в гидрологии, которые и нужны нашей науке — фундаментальной и прикладной. Идея эта проста и очевидна: если математические модели представляют собой приближенное описание явлений гидрологического мира, выраженного с помощью математической символики, то пределом наших стремлений должно стать почти полное и естественное слияние математической формы и гидрологического содержания. Математик-прикладник сможет наконец осознать и почувствовать, что же такое эта наука гидрология во всей ее полноте, красоте и рас-

положенности к математике. А гидролог сможет сделать подобное в отношении математики, привлекаемой к моделированию в его науке. И при этом недопустимы никакое противоречие и никакое взаимонепонимание.

Тем не менее мы вынуждены констатировать, что оптимальное соприкосновение гидрологии и математики пока остается мечтой. И все известные нам модели различных гидрологических явлений, особенно формирования стока, всегда имеют характерные акценты, по которым мы тут же поймем, кто создатель модели — слабо воспринимающий математику гидролог или до конца так и не осознавший гидрологию математик. А ключ ко всему — это деликатное постижение средств и духа математики и столь же неформальное понимание того гидрологического мира, которому мы собираемся позволить проникнуть в наши теории и модели. И здесь крайне необходимо обостренное внутреннее ощущение всех важных моментов, присущих как гидрологии, так и математике, причем хорошо бы в одной голове.

Прежде чем «модельмейстеры» (мы сознательно используем несколько ироничный термин, ибо лучшего пока не заслуживаем) приступят к решению конкретной гидрологической задачи, они должны сформулировать для себя (да и для других) требования по отношению к гидрологическому содержанию и математическому воплощению.

## **1.4. Цели моделирования**

Цели гидрологического моделирования многогранны: исследовательские и прикладные, стандартизированные и уникальные, обыденные и фантастические, локальные и глобальные, ориентированные в прошлое и будущее...

Математическое моделирование в принципе способно решать любые традиционные и многие новые задачи гидрологии. Это в первую очередь изучение процессов формирования стока с помощью модели, включая всякого рода вычислительные эксперименты, а также чисто прикладные задачи, например получение гидрографов стока с неизученных бассейнов, прогнозная оценка изменений стока под влиянием изменений ландшафтов и климата, оперативный краткосрочный и долгосрочный прогноз при разных фазах режима стока. Моделирование позволяет получить во всех перечисленных ситуациях информацию об элементах водного баланса (осадки, сток, испарение) и о переменных состоянии в различных точках речных бассейнов (запасы воды в снежном покрове, температура и влажность почвы, уровень грунтовых вод). Модели формирования стока совместно с геохимическими и экологическими моделями создают основу для научного обоснования мероприятий по охране окружающей