СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

С. Г. ГРИГОРЬЕВ, С. В. ИВОЛГИНА

МАТЕМАТИКА

Под редакцией **проф. В. А. Гусева**

УЧЕБНИК

Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением «Федеральный институт развития образования» в качестве учебника для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих образовательные программы среднего профессионального образования

Регистрационный номер рецензии 122
от 14 мая 2010 г. ФГУ «ФИРО»

9-е издание, стереотипное

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Г831

Рецензенты:

проф., канд. пед. наук Московского городского педагогического университета
Т.А.Корешкова;
преподаватель математики ГОУ СПО «Политехнический колледж № 39»
Л.К.Лисицина;
преподаватели математики Мытищинского машиностроительного техникума
Л.Г.Осипова, *Т.Н.Корчагина*

Григорьев С.Г.

Г831 Математика : учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / С.Г.Григорьев, С.В.Иволгина; под ред. В.А.Гусева. — 9-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 416 с.

ISBN 978-5-7695-9691-9

Материал учебника охватывает все основные разделы математики: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, обыкновенные дифференциальные уравнения, а также элементы теории вероятностей и математической статистики. Каждый раздел включает разбор практических задач и задачи для самостоятельного решения.

Учебник может быть использован при изучении дисциплины «Математика» в соответствии с требованиями ФГОС СПО для среднего профессионального обучения.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-7695-9691-9

Предисловие

В настоящее время математика служит фундаментом ряда экономических дисциплин. Овладение ее методами и умение применять их на практике необходимы каждому экономисту, поэтому цель предлагаемого учебника — изложение основ современной математики и их приложений в экономических областях.

Материал книги разбит на семь глав: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, основы дискретной математики, численные методы алгебры, основы теории вероятностей и математической статистики.

В учебнике дано большое количество примеров с решениями, в том числе прикладного характера, а также задачи для самостоятельного решения. Большинство фундаментальных теорем приведено с доказательствами, в конце которых стоит специальный знак ■, заменяющий слова «что и требовалось доказать».

Учебник соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования. Может быть рекомендован учителям и школьникам старших классов средних школ, а также служить для целей самообразования.

В учебнике приняты следующие условные обозначения:

О — определение;

Т — теорема;

Л — лемма;

С — следствие.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1.1. Общие понятия

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами *постоянными* и величинами *переменными*.

О ***Постоянной*** называется величина, сохраняющая одно и то же числовое значение (или вообще, или в данном примере).

Примеры. **1.** Сумма углов в треугольнике есть величина постоянная ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

2. Отношение длины окружности к ее диаметру $\left(\frac{2\pi R}{2R} = \pi\right)$ есть величина постоянная.

Среди постоянных величин полезно различать *абсолютно постоянные* и *параметры*.

Первые в любых условиях и при всяких заданиях сохраняют одно и то же определенное числовое значение, например 2, –3, $\sqrt{7}$, π, 2π, ...

Параметры лишь условно постоянны (т. е. в пределах одного примера их рассматривают как величины не меняющиеся, но в пределах другого примера они могут иметь совсем другие значения, хотя точно так же не меняющиеся). Например, числа k и b в данном уравнении прямой $y = kx + b$ постоянны.

О ***Переменной*** называется величина, принимающая различные числовые значения.

Примеры. **1.** При бросании вверх камня его расстояние до поверхности Земли есть величина переменная.

2. Скорость автомобиля при движении по городским улицам есть величина переменная.

Совокупность числовых значений, принимаемых переменной величиной, называется *областью ее значений*. Геометрически она изображается в виде некоторого множества точек числовой прямой.

1.1.2. Функция одной переменной

Пусть даны два множества произвольной природы X и Y, состоящие из произвольных элементов x и y.

О Если каждому элементу x множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X ***определена функция*** со значениями в множестве Y, и пишут: $y = f(x)$.

Таким образом, для того чтобы задать функцию, необходимы три компонента: два множества и правило их соответствия.

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменная y — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Множество X называется *областью определения функции*, а множество Y — *областью значений функции*. В дальнейшем область определения функции будем обозначать $D(f)$, а множество ее значений — $E(f)$.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции понимается *область допустимых значений* аргумента x, т. е. множество таких значений x, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл.

Примеры. **1.** $y = \sin x$: $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = [-1; 1]$.

2. $y = \dfrac{x-8}{x^2-7x+12} = \dfrac{x-8}{(x-3)(x-4)}$:

$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$, так как $x \neq 3$ и $x \neq 4$.

3. $y = \lg(4 - x^2)$:

$D(f) = (-2; 2)$, так как $4 - x^2 > 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$.

Замечание. Для обозначения функции не обязательно использовать буквы y и x. Например, каждому значению радиуса шара R соответствует одно значение объема шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Следовательно, объем шара является функцией радиуса шара. Областью определения этой функции является множество $D(V) = [0; +\infty)$, так как радиус шара не может быть отрицательным. Множество значений $E(V) = [0; +\infty)$, так как объем шара не может быть отрицательным.

О ***Частным значением*** функции $y = f(x)$ при $x = x_0$, $x_0 \in X$, называется то значение y, которое соответствует данному значению x_0. Оно обозначается через $f(x_0)$.

Примеры. **1.** Вычислить частное значение функции $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ при $R = 3$.

Решение. Имеем: $V(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$.

2. Дана функция $y = 2\sqrt{4-x} + \frac{3}{\sqrt{x+2}}$. Найти ее область определения и частные значения при $x = 0$; $x = 2$.

Решение. 1) Данная функция определена для всех значений x, при которых оба слагаемых имеют действительные значения. Поэтому ее областью определения является пересечение двух множеств, представляющих области определения каждого слагаемого, т. е.

$$D(f) = \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} = (-2; 4].$$

2) Частными значениями данной функции являются числа:

$$f(0) = 2\sqrt{4-0} + \frac{3}{\sqrt{0+2}} = 2 \cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

и

$$f(2) = 2\sqrt{4-2} + \frac{3}{\sqrt{2+2}} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} + 1{,}5.$$

1.1.3. Способы задания функции

Функцию можно задать аналитическим, табличным, графическим и словесным способами. Рассмотрим подробнее способы задания функции.

Аналитический. В этом способе функциональная зависимость между переменными x, y выражается в виде формулы, которая указывает совокупность тех математических операций, которые должны быть выполнены, чтобы по заданному значению аргумента найти соответствующее значение функции. При аналити-

ческом задании функции обычно не указывается область ее определения.

Примеры. **1.** $y = x^4$. **2.** $S = vt$. **3.** $y = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Функцию не следует отождествлять с формулой, с помощью которой она задана. Например, функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $y = x^2$, $x \in [1; 3]$, выраженные одной и той же формулой $y = x^2$, различны, так как имеют разные области определения.

Наоборот, одна и та же функция может быть задана разными формулами на различных участках ее области определения.

Например,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \le 0; \\ x + 2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь две формулы задают одну функцию, определенную на всей числовой прямой. При $x \le 0$ значения этой функции определяются по первой формуле, а при $x > 0$ — по второй. График этой функции представлен в плоскости xOy (рис. 1.1).

Табличный. Аналитический способ задания удобен тем, что значения функции можно вычислить при любых взятых из области определения значениях аргумента. Этот способ является основным в математическом анализе. Однако для расчетов он часто оказывается неудобным, так как сопряжен с необходимостью выполнения в каждом отдельном случае многочисленных, часто трудоемких, вычислений. Поэтому на практике определяются значения функций для большого числа выбранных значений аргумента x и составляются таблицы этих значений (например, тригонометрические, логарифмические таблицы и др.). Когда же опытным путем описывается функциональная зависимость между переменными, то составляются таблицы величин — аргумента и функции, причем в этом случае значения функции являются приближенными.

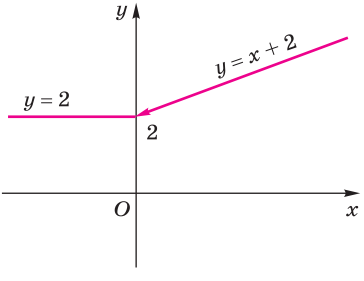


Рис. 1.1

Пример. Рассмотрим взаимосвязь между ценой некоторого продукта p и величиной спроса на этот продукт q, которая может быть представлена в виде таблицы:

p (руб.)	100	120	140	160	180	...
q (тыс. шт.)	20	18	16	14	12	...

Как видно из таблицы, спрос убывает с возрастанием цены.

Графический. Если функция задана в виде формулы $y = f(x)$, то ее графиком является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

Примеры. **1.** Графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является полуокружность (рис. 1.2).

2. Графиком функции $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ является правая ветвь гиперболы (рис. 1.3).

3. Однако графически можно представить не только аналитические функции. Изобразим с помощью графика табличную взаимосвязь рассмотренного выше примера между ценой некоторого продукта p и величиной спроса на этот продукт q (рис. 1.4).

В данном примере все значения находятся на прямой линии $p = 300 - 10q$.

4. Примером графической зависимости может служить также электрокардиограмма (ЭКГ), широко используемая в медицине.

Словесный. В этом способе функция описывается правилом ее составления, например функция Дирихле: $f(x) = 1$, если x — рационально и $f(x) = 0$, если x — иррационально, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

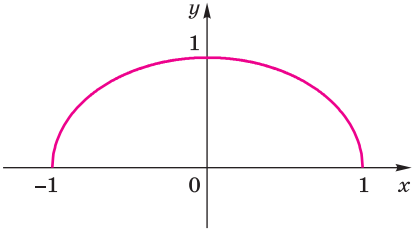


Рис. 1.2

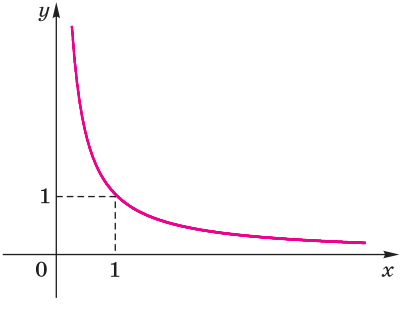


Рис. 1.3

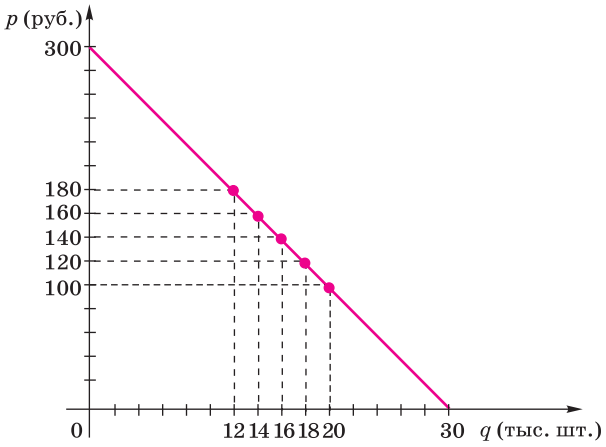


Рис. 1.4

1.1.4. Основные свойства функций

Рассмотрим такие свойства функции как четность и монотонность, ограниченность и периодичность.

Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида*.

Примеры. **1.** Функция $y = x^4$ является четной, так как

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x).$$

2. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

3. Функция $y = x^2 + x^3$ — является функцией общего вида, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3;\ f(x) \neq f(-x);\ f(x) \neq -f(x).$$

4. Установить четность или нечетность функций:

1) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} - 3\sin x$; 2) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$; 3) $f(x) = 2|x| + 3e^{x^2}$;

4) $f(x) = 3x^2 - 2x$; 5) $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$.

Решение. 1) Заменив x на $(-x)$, получим

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} - 3\sin(-x) = -x^2\sqrt[3]{x} + 3\sin x = -(x^2\sqrt[3]{x} - 3\sin x) = -f(x),$$

т. е. $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция является нечетной.

2) $f(-x) = 3^{-x} + 3^{-(-x)} = 3^{-x} + 3^{x} = f(x)$, т. е. $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция является четной.

3) $f(-x) = 2|-x| + 3e^{(-x)^2} = 2|x| + 3e^{x^2} = f(x)$, т. е. функция является четной.

4) $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) = 3x^2 + 2x$, т. е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. является функцией общего вида.

5) $f(-x) = \ln\frac{-x-2}{-x+2} = \ln\frac{x+2}{x-2} = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1} = -\ln\frac{x-2}{x+2} = -f(x)$, т. е. функция является нечетной.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, например $y = x^2$ (рис. 1.5). График нечетной функции симметричен относительно начала координат, например $y = x^3$ (рис. 1.6).

Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Из определения следует, что если $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$, то функция возрастает на некотором промежутке X из области определения, если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает на этом промежутке, если $f(x_2) < f(x_1)$. Функции возрастающие и убывающие называются монотонными функциями.

Пример. Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $X = (-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $X = [0; +\infty)$.

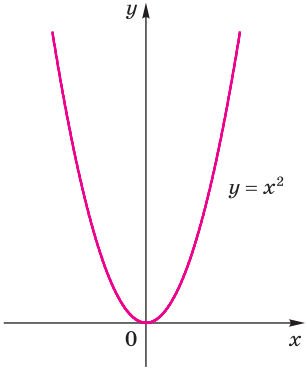


Рис. 1.5

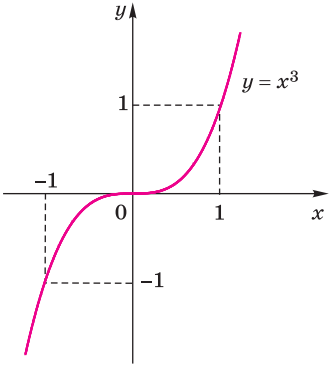


Рис. 1.6

Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором промежутке X из области определения, если существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

Пример. Функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ являются ограниченными на всей числовой прямой, так как $|\cos x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T > 0$, если для любых значений x из области определения функции $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Основным периодом функции называется наименьшее положительное число T, обладающее указанным свойством.

Например, функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ имеют период $T = 2\pi$, так как для любых значений x: $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$.

Пример. Найти основные периоды функций:
1) $f(x) = \cos 6x$; 2) $f(x) = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$.

Решение. 1) Так как основной период функции $\cos x$ равен 2π, то основной период функции $f(x) = \cos 6x$ равен $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

2) Для функции $\sin 4x$ основной период равен $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а для функции $\operatorname{tg} 3x$ основной период равен $T_2 = \frac{\pi}{3}$.

Тогда основным периодом данной функции $f(x) = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$ является наименьшее общее кратное чисел $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$, т. е. $T = \pi$.

1.1.5. Классификация функций

О ***Целой рациональной функцией*** (многочленом) называют такую функцию, над значениями аргумента x которой и некоторыми постоянными числами выполняются операции: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую положительную степень (и притом конечное число раз).

Общий вид целой рациональной функции (многочлена n-й степени):

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — целое положительное или равное нулю число; a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n — коэффициенты (постоянные числа).

Частные случаи: *прямая пропорциональная зависимость* $y = kx$; *линейная зависимость* $y = kx + b$; *квадратичная зависимость* $y = ax^2 + bx + c$.

О ***Дробной рациональной функцией*** называют функцию $R_n(x)$, представимую в виде частного от деления двух целых рациональных функций:

$$R_n(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m},$$

где $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, b_m$ — коэффициенты (постоянные числа).

Частные случаи: *обратная пропорциональная зависимость* $y = \frac{k}{x}$; *дробно-линейная функция* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Совокупность целых рациональных и дробных рациональных функций образует класс ***рациональных функций***.

Примеры. **1.** Функция $y = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ является целой рациональной функцией или многочленом 3-й степени относительно x.

2. Функция $y = \frac{3x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{5x^2 + 2x - 3}$ является дробной рациональной функцией.

О ***Иррациональной функцией*** называют такую функцию, над аргументом x которой, кроме перечисленных ранее первых пяти алгебраических операций, производится еще операция извлечения корня конечное число раз и результат не является рациональной функцией.

Пример. Функция $y = \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 2x - 3}} + \left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^2$ является иррациональной функцией.

Совокупность рациональных и иррациональных функций образуют класс ***алгебраических функций***.

Трансцендентная функция — всякая неалгебраическая функция.

Примеры. **1.** Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = \mathrm{e}^x$ (экспонента).

2. Логарифмические функции: $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = \ln x$ (натуральный логарифм), $y = \lg x$ (десятичный логарифм).

3. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

4. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

1.1.6. Понятие сложной функции

Пусть $u = \varphi(x)$ — некоторая функция от переменной x. Рассмотрим другую функцию $y = f(u)$ такую, что ее область определения совпадает или хотя бы имеет общую часть с множеством значений функции $u = \varphi(x)$. Тогда получим функцию $y = f(u) = f(\varphi(x))$ как функцию от x, т. е. задание x определяет функцию $u = \varphi(x)$, а задание u, если оно попадает в множество значений функции $u = \varphi(x)$, определит функцию y. Таким образом, в конечном счете заданием x определяется значение y, т.е. y становится функцией от x. Полученная таким образом функция $y = f(u) = f(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией*** от x (заданной через промежуточную функцию u).

Пример. Функция $y = \sin^2 x$ является сложной функцией. Ее можно представить так: $y = u^2$, где $u = \sin x$.

1.1.7. Обратная функция

Рассмотрим монотонную функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$, и пусть отрезок $[c; d]$ является множеством ее значений.

Функция $y = f(x)$ ставит в соответствие каждой точке $x_0 \in [a; b]$ единственную точку $y_0 \in [c; d]$ (рис. 1.7).

Можно установить и обратную закономерность: каждому значению y_0 из отрезка $[c; d]$ соответствует единственное значение $x_0 \in [a; b]$ (в силу монотонности функции) такое, что $y_0 = f(x_0)$.

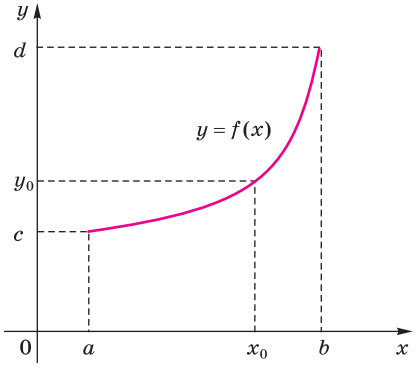


Рис. 1.7

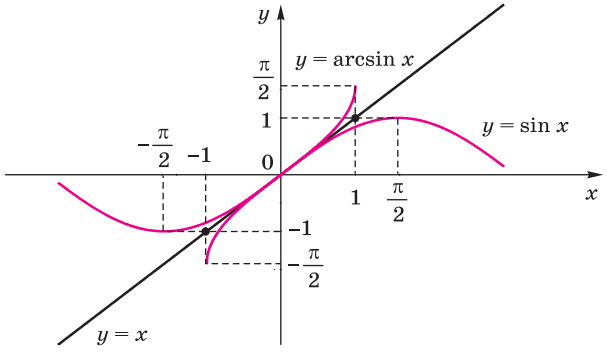


Рис. 1.8

Таким образом можно рассматривать x как функцию от y с областью определения $[c; d]$ и множеством значений $[a; b]$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется ***обратной функцией*** по отношению к функции $y = f(x)$. Если же в уравнении $x = f^{-1}(y)$ заменить x на y, то функция $y = f^{-1}(x)$ будет ***взаимно-обратной*** к функции $y = f(x)$.

Графики прямой и взаимно-обратной функций симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов.

Пример. Найти взаимно-обратную функцию к функции $y = \sin x$ с $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $E(f) = [-1; 1]$.

Решение. Из уравнения $y = \sin x$ выразим x через y. Получим $x = \arcsin y$. Заменяя в этом соотношении x на y и y на x будем иметь: $y = \arcsin x$ $D(f) = [-1; 1]$ и $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, функции $y = \sin x$ $\left(D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } E(f) = [-1; 1]\right)$ и $y = \arcsin x$ $\left(D(f) = [-1; 1] \text{ и } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ являются взаимно-обратными. Их графики симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов (рис. 1.8).

1.1.8. Явные и неявные функции

О Функция называется ***явной***, если она задана формулой, правая часть которой не содержит y.

Пример. $y = \sin x$.

О Функция называется ***неявной***, если она задана уравнением $F(x; y) = 0$, из которого либо невозможно выразить y, либо в этом нет необходимости.

Примеры. $\sqrt{x^2 - y^2} + \lg y = 3$; $x^2 + y^2 = 1$.

1.1.9. Однозначные и многозначные функции

О Если каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, то она называется ***однозначной***.

Пример. $y = 3x^2$.

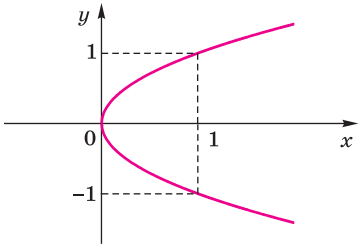


Рис. 1.9

Если каждому значению аргумента соответствует несколько значений функции, то она называется ***многозначной***.

Пример. $y = \pm\sqrt{x}$ (рис. 1.9).

1.1.10. Элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция $y = x^n$, где $n \in \mathbf{R}$;

2) показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = e^x$ (экспонента);

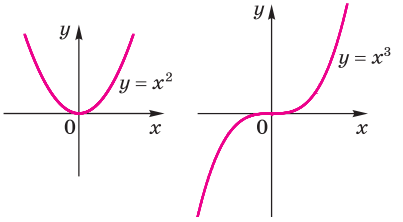
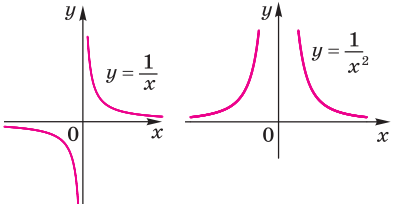
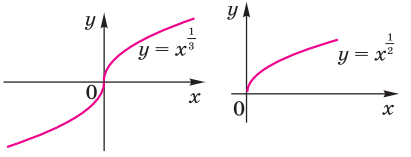
3) логарифмические функции: $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = \ln x$, $y = \lg x$;

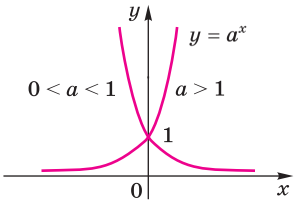
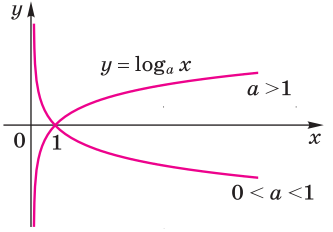
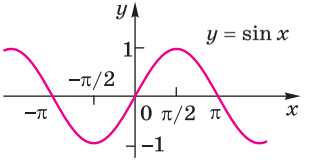
4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические (круговые) функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

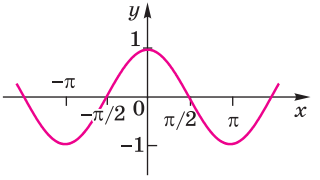
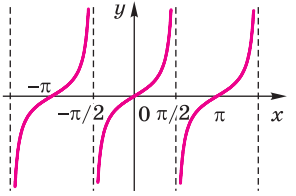
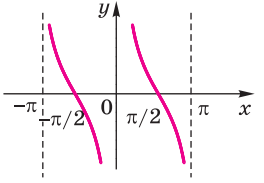
О ***Элементарными функциями*** называют функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (формирование сложных функций), примененных конечное число раз.

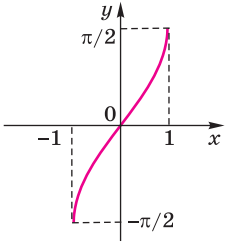
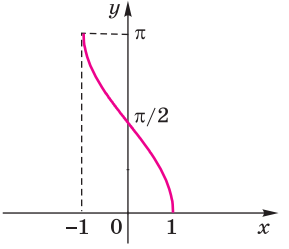
Таблица 1.1

№ п/п	Обозначение функции	Область определения	Множество значений	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
1. Степенная функция (частные случаи)							
1	$y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0, +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно. Четная, если n — четно	Возрастает на $(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно. Убывает на $(-\infty, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	
2	$y = x^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, если n — нечетно, $(0, +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно. Четная, если n — четно	Убывает на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, если n — нечетно. Возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	
3	$y = x^{1/n}$, $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0, +\infty)$, если n — четно	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0, +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно	Возрастает на $(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно. Возрастает на $(0, +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	

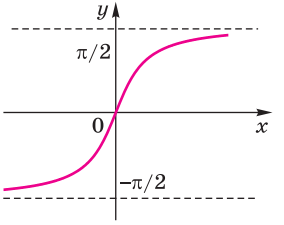
2. Показательная функция							
4	$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	Общего вида	Возрастает, если $a > 1$. Убывает, если $0 < a < 1$	Непериодическая	
3. Логарифмическая функция							
5	$y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0, +\infty)$, если $a > 1$. Убывает на $(0, +\infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	
4. Тригонометрические функции							
6	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	Нечетная	Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$. Убывает на $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$	Период $T = 2\pi$	

Продолжение табл. 1.1

№ п/п	Обозначение функции	Область определения	Множество значений	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
7	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	Четная	Возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$. Убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$	Период $T = 2\pi$	
8	$y = \operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	$(-\infty, +\infty)$	Нечетная	Возрастает на $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	Период $T = \pi$	
9	$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	$(-\infty, +\infty)$	Нечетная	Убывает на $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	Период $T = \pi$	

5. Обратные тригонометрические функции							
10	$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	Нечетная	Возрастает на $[-1; 1]$	Непериодическая	
11	$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	Общего вида	Убывает на $[-1; 1]$	Непериодическая	

Окончание табл. 1.1

№ п/п	Обозначение функции	Область определения	Множество значений	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
12	$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\pi/2; \pi/2)$	Нечетная	Возрастает на $(-\infty, +\infty)$	Непериодическая	
13	$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0; \pi)$	Общего вида	Убывает на $(-\infty, +\infty)$	Непериодическая