СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

С. Г. ГРИГОРЬЕВ, С. В. ИВОЛГИНА

МАТЕМАТИКА

Под редакцией **проф. В. А. Гусева**

УЧЕБНИК

Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением «Федеральный институт развития образования» в качестве учебника для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих образовательные программы среднего профессионального образования

Регистрационный номер рецензии 122
от 14 мая 2010 г. ФГУ «ФИРО»

10-е издание, стереотипное

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Г831

Р е ц е н з е н т ы:

проф., канд. пед. наук Московского городского педагогического университета *Т.А.Корешкова*;
преподаватель математики ГОУ СПО «Политехнический колледж № 39» *Л.К.Лисицина*;
преподаватели математики Мытищинского машиностроительного техникума *Л.Г.Осипова*, *Т.Н.Корчагина*

Григорьев С.Г.

Г831 Математика : учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / С.Г.Григорьев, С.В.Иволгина; под ред. В.А.Гусева. — 10-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 416 с.

ISBN 978-5-4468-0624-9

Материал учебника охватывает все основные разделы математики: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, обыкновенные дифференциальные уравнения, а также элементы теории вероятностей и математической статистики. Каждый раздел включает разбор практических задач и задачи для самостоятельного решения.

Учебник может быть использован при изучении дисциплины «Математика» в соответствии с требованиями ФГОС СПО для среднего профессионального обучения.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-4468-0624-9

Предисловие

В настоящее время математика служит фундаментом ряда экономических дисциплин. Овладение ее методами и умение применять их на практике необходимы каждому экономисту, поэтому цель предлагаемого учебника — изложение основ современной математики и их приложений в экономических областях.

Материал книги разбит на семь глав: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, основы дискретной математики, численные методы алгебры, основы теории вероятностей и математической статистики.

В учебнике дано большое количество примеров с решениями, в том числе прикладного характера, а также задачи для самостоятельного решения. Большинство фундаментальных теорем приведено с доказательствами, в конце которых стоит специальный знак ■, заменяющий слова «что и требовалось доказать».

Учебник соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования. Может быть рекомендован учителям и школьникам старших классов средних школ, а также служить для целей самообразования.

В учебнике приняты следующие условные обозначения:

$\boxed{\text{О}}$ — определение;

$\boxed{\text{Т}}$ — теорема;

$\boxed{\text{Л}}$ — лемма;

$\boxed{\text{С}}$ — следствие.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1.1. Общие понятия

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами *постоянными* и величинами *переменными*.

О ***Постоянной*** называется величина, сохраняющая одно и то же числовое значение (или вообще, или в данном примере).

Примеры. **1.** Сумма углов в треугольнике есть величина постоянная ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

2. Отношение длины окружности к ее диаметру $\left(\frac{2\pi R}{2R} = \pi\right)$ есть величина постоянная.

Среди постоянных величин полезно различать *абсолютно постоянные* и *параметры*.

Первые в любых условиях и при всяких заданиях сохраняют одно и то же определенное числовое значение, например 2, –3, $\sqrt{7}$, π, 2π, ...

Параметры лишь условно постоянны (т. е. в пределах одного примера их рассматривают как величины не меняющиеся, но в пределах другого примера они могут иметь совсем другие значения, хотя точно так же не меняющиеся). Например, числа k и b в данном уравнении прямой $y = kx + b$ постоянны.

О ***Переменной*** называется величина, принимающая различные числовые значения.

Примеры. **1.** При бросании вверх камня его расстояние до поверхности Земли есть величина переменная.

2. Скорость автомобиля при движении по городским улицам есть величина переменная.

Совокупность числовых значений, принимаемых переменной величиной, называется *областью ее значений*. Геометрически она изображается в виде некоторого множества точек числовой прямой.

1.1.2. Функция одной переменной

Пусть даны два множества произвольной природы X и Y, состоящие из произвольных элементов x и y.

$\boxed{\text{О}}$ Если каждому элементу x множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X ***определена функция*** со значениями в множестве Y, и пишут: $y = f(x)$.

Таким образом, для того чтобы задать функцию, необходимы три компонента: два множества и правило их соответствия.

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменная y — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Множество X называется *областью определения функции*, а множество Y — *областью значений функции*. В дальнейшем область определения функции будем обозначать $D(f)$, а множество ее значений — $E(f)$.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции понимается *область допустимых значений* аргумента x, т. е. множество таких значений x, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл.

Примеры. **1.** $y = \sin x$: $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = [-1; 1]$.

2. $y = \dfrac{x-8}{x^2-7x+12} = \dfrac{x-8}{(x-3)(x-4)}$:

$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$, так как $x \neq 3$ и $x \neq 4$.

3. $y = \lg(4 - x^2)$:

$D(f) = (-2; 2)$, так как $4 - x^2 > 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$.

Замечание. Для обозначения функции не обязательно использовать буквы y и x. Например, каждому значению радиуса шара R соответствует одно значение объема шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Следовательно, объем шара является функцией радиуса шара. Областью определения этой функции является множество $D(V) = [0; +\infty)$, так как радиус шара не может быть отрицательным. Множество значений $E(V) = [0; +\infty)$, так как объем шара не может быть отрицательным.

О ***Частным значением*** функции $y = f(x)$ при $x = x_0$, $x_0 \in X$, называется то значение y, которое соответствует данному значению x_0. Оно обозначается через $f(x_0)$.

Примеры. **1.** Вычислить частное значение функции $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ при $R = 3$.

Решение. Имеем: $V(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$.

2. Дана функция $y = 2\sqrt{4-x} + \frac{3}{\sqrt{x+2}}$. Найти ее область определения и частные значения при $x = 0$; $x = 2$.

Решение. 1) Данная функция определена для всех значений x, при которых оба слагаемых имеют действительные значения. Поэтому ее областью определения является пересечение двух множеств, представляющих области определения каждого слагаемого, т. е.

$$D(f) = \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} = (-2; 4].$$

2) Частными значениями данной функции являются числа:

$$f(0) = 2\sqrt{4-0} + \frac{3}{\sqrt{0+2}} = 2 \cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

и

$$f(2) = 2\sqrt{4-2} + \frac{3}{\sqrt{2+2}} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} + 1{,}5.$$

1.1.3. Способы задания функции

Функцию можно задать аналитическим, табличным, графическим и словесным способами. Рассмотрим подробнее способы задания функции.

Аналитический. В этом способе функциональная зависимость между переменными x, y выражается в виде формулы, которая указывает совокупность тех математических операций, которые должны быть выполнены, чтобы по заданному значению аргумента найти соответствующее значение функции. При аналитическом задании функции обычно не указывается область ее определения.

Примеры. **1.** $y = x^4$. **2.** $S = vt$. **3.** $y = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Функцию не следует отождествлять с формулой, с помощью которой она задана. Например, функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $y = x^2$, $x \in [1; 3]$, выраженные одной и той же формулой $y = x^2$, различны, так как имеют разные области определения.

Наоборот, одна и та же функция может быть задана разными формулами на различных участках ее области определения.

Например,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \le 0; \\ x + 2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь две формулы задают одну функцию, определенную на всей числовой прямой. При $x \le 0$ значения этой функции определяются по первой формуле, а при $x > 0$ — по второй. График этой функции представлен в плоскости xOy (рис. 1.1).

Табличный. Аналитический способ задания удобен тем, что значения функции можно вычислить при любых взятых из области определения значениях аргумента. Этот способ является основным в математическом анализе. Однако для расчетов он часто оказывается неудобным, так как сопряжен с необходимостью выполнения в каждом отдельном случае многочисленных, часто трудоемких, вычислений. Поэтому на практике определяются значения функций для большого числа выбранных значений аргумента x и составляются таблицы этих значений (например, тригонометрические, логарифмические таблицы и др.). Когда же опытным путем описывается функциональная зависимость между переменными, то составляются таблицы величин — аргумента и функции, причем в этом случае значения функции являются приближенными.

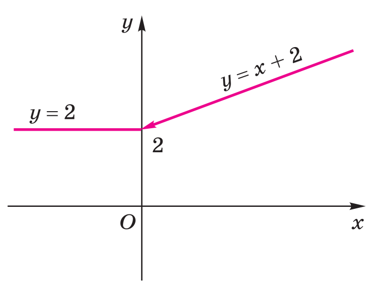

Рис. 1.1

Пример. Рассмотрим взаимосвязь между ценой некоторого продукта p и величиной спроса на этот продукт q, которая может быть представлена в виде таблицы:

p (руб.)	100	120	140	160	180	...
q (тыс. шт.)	20	18	16	14	12	...

Как видно из таблицы, спрос убывает с возрастанием цены.

Графический. Если функция задана в виде формулы $y = f(x)$, то ее графиком является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

Примеры. **1.** Графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является полуокружность (рис. 1.2).

2. Графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ является правая ветвь гиперболы (рис. 1.3).

3. Однако графически можно представить не только аналитические функции. Изобразим с помощью графика табличную взаимосвязь рассмотренного выше примера между ценой некоторого продукта p и величиной спроса на этот продукт q (рис. 1.4).

В данном примере все значения находятся на прямой линии $p = 300 - 10q$.

4. Примером графической зависимости может служить также электрокардиограмма (ЭКГ), широко используемая в медицине.

Словесный. В этом способе функция описывается правилом ее составления, например функция Дирихле: $f(x) = 1$, если x — рационально и $f(x) = 0$, если x — иррационально, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

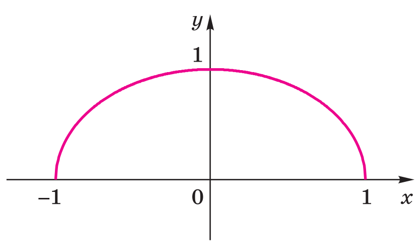

Рис. 1.2

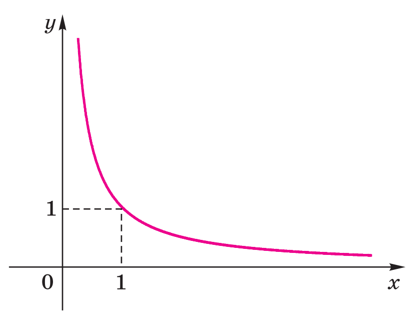

Рис. 1.3

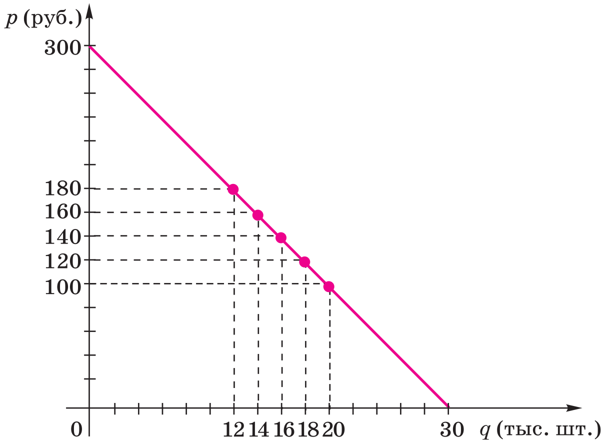

Рис. 1.4

1.1.4. Основные свойства функций

Рассмотрим такие свойства функции как четность и монотонность, ограниченность и периодичность.

Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида*.

Примеры. **1.** Функция $y = x^4$ является четной, так как

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x).$$

2. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

3. Функция $y = x^2 + x^3$ — является функцией общего вида, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3;\ f(x) \neq f(-x);\ f(x) \neq -f(x).$$

4. Установить четность или нечетность функций:

1) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} - 3\sin x$; 2) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$; 3) $f(x) = 2|x| + 3e^{x^2}$;

4) $f(x) = 3x^2 - 2x$; 5) $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$.

Решение. 1) Заменив x на $(-x)$, получим

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} - 3\sin(-x) = -x^2\sqrt[3]{x} + 3\sin x = -(x^2\sqrt[3]{x} - 3\sin x) = -f(x),$$

т. е. $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция является нечетной.

2) $f(-x) = 3^{-x} + 3^{-(-x)} = 3^{-x} + 3^{x} = f(x)$, т. е. $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция является четной.

3) $f(-x) = 2|-x| + 3e^{(-x)^2} = 2|x| + 3e^{x^2} = f(x)$, т. е. функция является четной.

4) $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) = 3x^2 + 2x$, т. е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. является функцией общего вида.

5) $f(-x) = \ln\dfrac{-x-2}{-x+2} = \ln\dfrac{x+2}{x-2} = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{x-2}{x+2} = -f(x)$, т. е. функция является нечетной.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, например $y = x^2$ (рис. 1.5). График нечетной функции симметричен относительно начала координат, например $y = x^3$ (рис. 1.6).

Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Из определения следует, что если $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$, то функция возрастает на некотором промежутке X из области определения, если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает на этом промежутке, если $f(x_2) < f(x_1)$. Функции возрастающие и убывающие называются монотонными функциями.

Пример. Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $X = (-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $X = [0; +\infty)$.

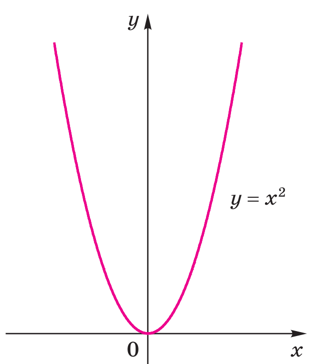

Рис. 1.5

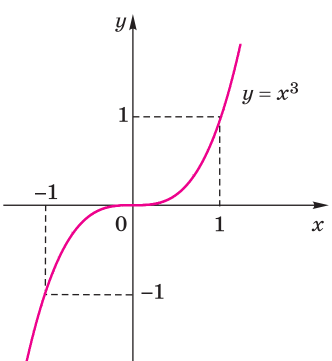

Рис. 1.6

Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором промежутке X из области определения, если существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

Пример. Функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ являются ограниченными на всей числовой прямой, так как $|\cos x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T > 0$, если для любых значений x из области определения функции $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Основным периодом функции называется наименьшее положительное число T, обладающее указанным свойством.

Например, функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ имеют период $T = 2\pi$, так как для любых значений x: $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$.

Пример. Найти основные периоды функций:

1) $f(x) = \cos 6x$; 2) $f(x) = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$.

Решение. 1) Так как основной период функции $\cos x$ равен 2π, то основной период функции $f(x) = \cos 6x$ равен $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

2) Для функции $\sin 4x$ основной период равен $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а для функции $\operatorname{tg} 3x$ основной период равен $T_2 = \frac{\pi}{3}$.

Тогда основным периодом данной функции $f(x) = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$ является наименьшее общее кратное чисел $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$, т. е. $T = \pi$.

1.1.5. Классификация функций

О ***Целой рациональной функцией*** (многочленом) называют такую функцию, над значениями аргумента x которой и некоторыми постоянными числами выполняются операции: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую положительную степень (и притом конечное число раз).

Общий вид целой рациональной функции (многочлена n-й степени):

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — целое положительное или равное нулю число; a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n — коэффициенты (постоянные числа).

Частные случаи: *прямая пропорциональная зависимость* $y = kx$; *линейная зависимость* $y = kx + b$; *квадратичная зависимость* $y = ax^2 + bx + c$.

О ***Дробной рациональной функцией*** называют функцию $R_n(x)$, представимую в виде частного от деления двух целых рациональных функций:

$$R_n(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m},$$

где $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$; $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m$ — коэффициенты (постоянные числа).

Частные случаи: *обратная пропорциональная зависимость* $y=\dfrac{k}{x}$; *дробно-линейная функция* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Совокупность целых рациональных и дробных рациональных функций образует класс ***рациональных функций***.

Примеры. **1.** Функция $y=3x^3-2x^2+2x-3$ является целой рациональной функцией или многочленом 3-й степени относительно x.

2. Функция $y=\dfrac{3x^3-2x^2+2x-3}{5x^2+2x-3}$ является дробной рациональной функцией.

О ***Иррациональной функцией*** называют такую функцию, над аргументом x которой, кроме перечисленных ранее первых пяти алгебраических операций, производится еще операция извлечения корня конечное число раз и результат не является рациональной функцией.

Пример. Функция $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-3x+2}{3x^2+2x-3}}+\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2$ является иррациональной функцией.

Совокупность рациональных и иррациональных функций образуют класс ***алгебраических функций***.

Трансцендентная функция — всякая неалгебраическая функция.

Примеры. **1.** Показательная функция $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$), $y=e^x$ (экспонента).

2. Логарифмические функции: $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$), $y=\ln x$ (натуральный логарифм), $y=\lg x$ (десятичный логарифм).

3. Тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$.

4. Обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$.

1.1.6. Понятие сложной функции

Пусть $u = \varphi(x)$ — некоторая функция от переменной x. Рассмотрим другую функцию $y = f(u)$ такую, что ее область определения совпадает или хотя бы имеет общую часть с множеством значений функции $u = \varphi(x)$. Тогда получим функцию $y = f(u) = f(\varphi(x))$ как функцию от x, т.е. задание x определяет функцию $u = \varphi(x)$, а задание u, если оно попадает в множество значений функции $u = \varphi(x)$, определит функцию y. Таким образом, в конечном счете заданием x определяется значение y, т.е. y становится функцией от x. Полученная таким образом функция $y = f(u) = f(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией*** от x (заданной через промежуточную функцию u).

Пример. Функция $y = \sin^2 x$ является сложной функцией. Ее можно представить так: $y = u^2$, где $u = \sin x$.

1.1.7. Обратная функция

Рассмотрим монотонную функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$, и пусть отрезок $[c; d]$ является множеством ее значений.

Функция $y = f(x)$ ставит в соответствие каждой точке $x_0 \in [a; b]$ единственную точку $y_0 \in [c; d]$ (рис. 1.7).

Можно установить и обратную закономерность: каждому значению y_0 из отрезка $[c; d]$ соответствует единственное значение $x_0 \in [a; b]$ (в силу монотонности функции) такое, что $y_0 = f(x_0)$.

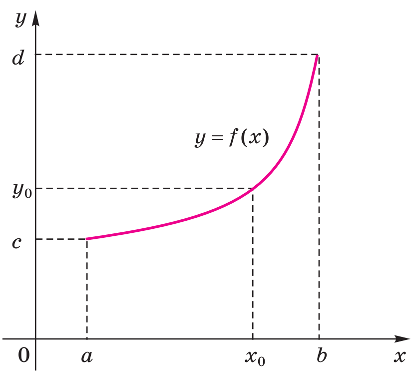

Рис. 1.7

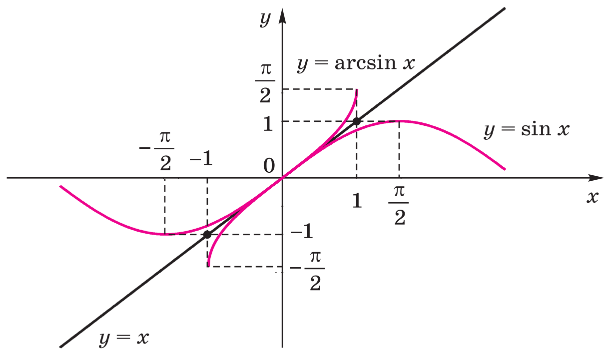

Рис. 1.8

Таким образом можно рассматривать x как функцию от y с областью определения $[c; d]$ и множеством значений $[a; b]$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется ***обратной функцией*** по отношению к функции $y = f(x)$. Если же в уравнении $x = f^{-1}(y)$ заменить x на y, то функция $y = f^{-1}(x)$ будет ***взаимно-обратной*** к функции $y = f(x)$.

Графики прямой и взаимно-обратной функций симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов.

Пример. Найти взаимно-обратную функцию к функции $y = \sin x$ с $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $E(f) = [-1; 1]$.

Решение. Из уравнения $y = \sin x$ выразим x через y. Получим $x = \arcsin y$. Заменяя в этом соотношении x на y и y на x будем иметь: $y = \arcsin x$ $D(f) = [-1; 1]$ и $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, функции $y = \sin x$ $\left(D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right.$ и $\left.E(f) = [-1; 1]\right)$ и $y = \arcsin x$ $\left(D(f) = [-1; 1] \text{ и } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ являются взаимно-обратными. Их графики симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов (рис. 1.8).

1.1.8. Явные и неявные функции

О Функция называется ***явной***, если она задана формулой, правая часть которой не содержит y.

Пример. $y = \sin x$.

О Функция называется ***неявной***, если она задана уравнением $F(x; y) = 0$, из которого либо невозможно выразить y, либо в этом нет необходимости.

Примеры. $\sqrt{x^2 - y^2} + \lg y = 3$; $x^2 + y^2 = 1$.

1.1.9. Однозначные и многозначные функции

О Если каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, то она называется ***однозначной***.

Пример. $y = 3x^2$.

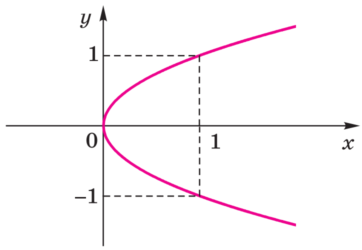

Рис. 1.9

Если каждому значению аргумента соответствует несколько значений функции, то она называется ***многозначной***.

Пример. $y = \pm\sqrt{x}$ (рис. 1.9).

1.1.10. Элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция $y = x^n$, где $n \in \mathbf{R}$;

2) показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \mathrm{e}^x$ (экспонента);

3) логарифмические функции: $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \ln x$, $y = \lg x$;

4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$;

5) обратные тригонометрические (круговые) функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

О ***Элементарными функциями*** называют функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (формирование сложных функций), примененных конечное число раз.